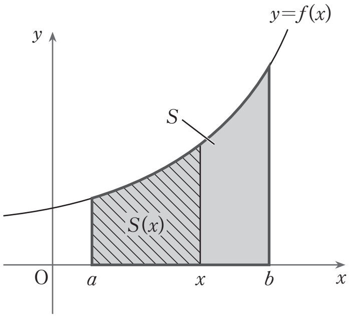
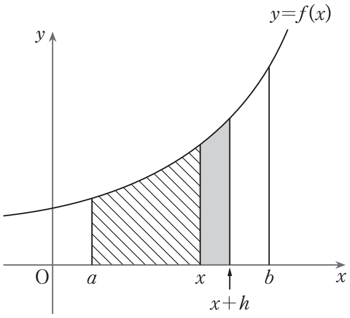
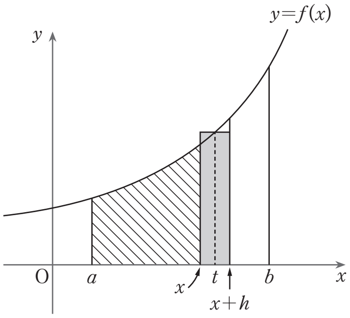
第19講　定積分と面積

PART1　定積分と面積

要点 ①　定積分と面積







右図のように，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を S とする。

また，区間 $a \leqq x \leqq b$ 内の x に対し，x 座標が a から x までの部分の面積を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は x の関数であり

$$S(a)=\quad,\ S(b)=\quad,\ S=S(\quad)-S(\quad)$$

である。

面積 $S(x)$ が，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つであることを示す。

$h>0$ として，x を h だけ増加させると，面積は

$$S(x+h)-S(x)$$

だけ増加する。

この増加した部分と面積が等しい，横の長さが h，縦の長さが $f(t)$ $(x \leqq t \leqq x+h)$ である長方形をとると

$$S(x+h)-S(x)=$$

すなわち，$\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(t)$　が成り立つ。

この式は $h<0$ のときも成り立つ。

ここで，$h \longrightarrow 0$ のとき，$t \longrightarrow$ 　であるから，$f(t) \longrightarrow f(\quad)$ となる。したがって

$$\lim_{h \to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x)\quad すなわち\quad S'(x)=f(x)$$

が成り立つ。よって，面積 $S(x)$ は関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つである。

したがって

$$S=S(b)-S(a)=\qquad\qquad=$$

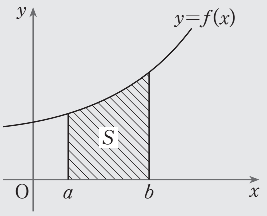
である。

一般に，次のことが成り立つ。

定積分と面積①

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

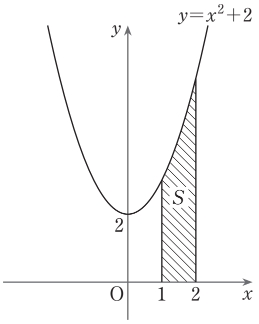


例 放物線 $y=x^2+2$ と x 軸，および 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求める。

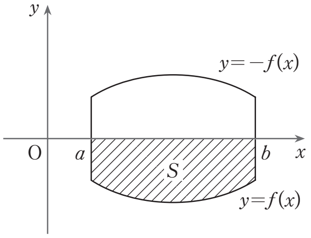
区間 $1 \leqq x \leqq 2$ において，$y>0$ であるから

$S=$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_1^2=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right)=\frac{13}{3}$$



区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は，右図のように，曲線 $y=f(x)$ を x 軸に関して対称に移動した曲線 $y=-f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積に等しい。

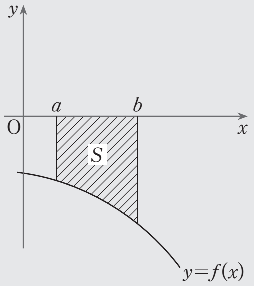


したがって，次のことが成り立つ。

定積分と面積②

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$$



[MEMO]

1 次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2+1$，$x=-1$，$x=2$

(2) $y=-x^2+2x-3$，$x=0$，$x=3$

Point Pickup

曲線と x 軸の間の部分の面積

曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。

① $y=f(x)$ のグラフをかく。

② 区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の上下関係を調べる。

③ ②において

常に $f(x) \geqq 0$ のとき　$S=\int_a^b f(x)dx$

常に $f(x) \leqq 0$ のとき　$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$

第 19 講　PART1 確認問題

次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

1　$y=x^2+3$，$x=-2$，$x=1$

$S=$ アイ

2　$y=-x^2+4x-5$，$x=0$，$x=3$

$S=$ ウ

[MEMO]

第 19 講　定積分と面積

PART1 定積分と面積

1　次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+1$，$x=-1$，$x=2$

(2)　$y=-x^2+2x-3$，$x=0$，$x=3$

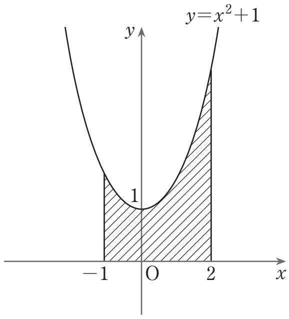
[解答]

(1)　区間 $-1\leqq x\leqq 2$ では　$y>0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=6$$



(2)　$y=-x^2+2x-3=-(x-1)^2-2$ より，

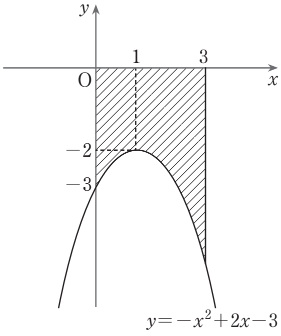
区間 $0\leqq x\leqq 3$ では $y<0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{0}^{3}\{-(-x^2+2x-3)\}dx$$

$$=\int_{0}^{3}(x^2-2x+3)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{0}^{3}=(9-9+9)-(0-0+0)=9$$



第 19 講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：12

[解説]

放物線は，右図のように，区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ では

$$y > 0$$

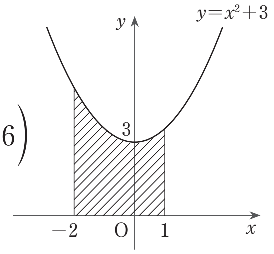
よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^{1} (x^2+3)\,dx \quad \text{[A]}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3}+3\right) - \left(-\frac{8}{3}-6\right)$$

$$= \mathbf{12}$$



[A]　区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

2 [正解] ウ：6

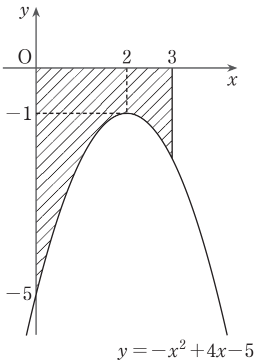
[解説]

$$y=-x^2+4x-5$$

$$=-(x-2)^2-1$$

より，区間 $0 \leqq x \leqq 3$ では，放物線は，右図のように x 軸の下側にあるから

$$y<0$$



よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^3 \{-(-x^2+4x-5)\}dx \quad \text{[B]}$$

$$=\int_0^3 (x^2-4x+5)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^3$$

$$=(9-18+15)-(0-0+0)$$

$$=\mathbf{6}$$

[B]　区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸, および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$